Műszaki folyamatok közgazdasági elemzése
Előadásvázlat
2013. október 17.

A technológia és a költségek dualitása

1. Korábban beláttuk az alábbi összefüggéseket:
   a) Ha a munka határterméke nő, akkor a határköltség csökken.
   b) Ha a munka határterméke csökken, akkor nő a határköltség.
   c) Ha a munka átlagterméke nő, akkor az átlagköltség csökken.
   d) Ha a munka átlagterméke csökken, akkor az átlagköltség nő.
   e) Az átlagköltség-görbe a minimumában metszi a határköltség-görbét; ez megfelel annak a már korábban levezetett megállapításnak, hogy az átlagtermék-görbe a maximumában metszi a határtermék-görbét.

2. Homogén termelési függvény

   Egy $z = h(x, y)$ függvény *r-edfokú homogén*, ha $m^r z = h(mx, my)$, azaz ha megszorzunk a független változókat ugyanazzal a számmal, akkor az eredményváltozó értéke az m^r - szorosra nő.

   Speciális esetek:

   a) Elsőfokú homogén függvény, azaz $r = 1$. Ezzel $mz = h(mx, my)$, vagyis az eredményváltozó értéke az ugyanhányszorosra nő, mint a független változók értékei, így az eredményváltozó értéke a független változók értékeinek az arányától függ.
   b) 0-fokú homogén függvény, azaz $r = 0$. Ezzel $z = h(mx, my)$, vagyis az eredményváltozó értéke nem módosul, ha a független változókat akármilyen nagy (kicsi) számmal szorzunk meg.

   Termelési függvényekre alkalmazva:

   A $q = F(K, L)$ függvény *r-edfokú homogén*, ha $m^r q = F(mK, mL)$. Az elsőfokú termelési függvény esetén $mq = F(mK, mL)$, amiből az $m = \frac{1}{L}$ helyettesítéssel $\frac{q}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$, ahol $k = \frac{K}{L}$. Ebben az esetben tehát az 1 főre jutó termelés $\left(\frac{q}{L}\right)$ az 1 főre jutó termeléstől $\left(\frac{K}{L}\right)$ függ, illetve q-ra átrendezve, $q = Lf(k)$.

   Példa: A $q = \sqrt{K \cdot L}$ termelési függvény elsőfokú homogén, hiszen $\sqrt{\lambda K \cdot \lambda L} = \sqrt{\lambda^2 K \cdot L} = \lambda\sqrt{K \cdot L} = \lambda q$. A hozzátartozó $f(k)$ függvényt is könnyen tudjuk meghatározni, mert $\frac{q}{L} = f(k)$, vagyis $f(k) = \frac{q}{L} = \frac{\sqrt{K \cdot L}}{L} = \sqrt{\frac{K \cdot L}{L^2}} = \sqrt{\frac{K}{L}} = \sqrt{k}$.

3. A homogenitás foka egyenlő a skálarugalmassággal.

Az $F(K,L)$ termelési függvény legyen r-edfokú homogén, azaz ha $q_0 = F(K_0, L_0)$, akkor

$$q = m^r q_0 = F(mK_0, mL_0). \tag{1}$$

Tehát $\frac{\partial q}{\partial m} = rm^{r-1}q_0$. (1)-ből következik $\frac{q}{m} = m^{r-1}q_0$, vagyis $\frac{\partial q}{\partial m} = r\frac{q}{m}$, s ezzel

$$\frac{\partial q}{\partial m}\frac{m}{q} = r. \tag{2}$$

A fenti képlet bal oldalán szereplő kifejezés a termelésnek az m szorzótényező szerinti rugalmassága, más szóval a skálarugalmasság. *Jelentése*: Ha a szorzótényezőt 1 %-kal növeljük, akkor a termelés r %-kal nő.

4. *Euler-tétel*: Egy r-edfokú $q = F(K,L)$ termelési függvény esetén igaz, hogy $rq = F_K K + F_L L$.[1]

Ha $F(K,L)$ r-edfokú homogén, akkor a definíció szerint $m^r q = F(mK, mL)$, amiből $m = \frac{1}{L}$-et véve $\left(\frac{1}{L}\right)^r q = F\left(\frac{K}{L},1\right)$ következik, vagyis $L^{-r}F(K,L) = F\left(\frac{K}{L},1\right) = f(k)$, ahol $k = \frac{K}{L}$, illetve

$$F(K,L) = L^r f(k). \tag{3}$$

Ebből:

$$F_K = \frac{\partial F}{\partial K} = L^r f'(k)\frac{1}{L} = L^{r-1}f'(k)$$

és

[1] Itt $F_K = \frac{\partial F}{\partial K}$ és $F_L = \frac{\partial F}{\partial L}$, vagyis F_K és F_L a tőke, illetve a munka határterméke.

$$F_L = \frac{\partial F}{\partial l} = rL^{r-1}f(k) + L^r f'(k)\left(-\frac{K}{L^2}\right) = L^{r-1}[rf(k) - f'(k)k].$$

Így:

$$F_K K + F_L L = L^{r-1}f'(k)K + L^{r-1}[rf(k) - f'(k)k]L =$$

$$= L^{r-1}f'(k)K + L^{r-1}rf(k)L - L^{r-1}f'(k)kL =$$

$$= L^{r-1}f'(k)K + L^{r-1}rf(k) - L^{r-1}f'(k)K = L^{r-1}rf(k)L = rL^r f(k),$$

amiből (3) miatt az

$$rq = F_K K + F_L L. \tag{4}$$

összefüggés adódik.

5. Tudjuk, hogy adott technológiához meghatározott költségösszefüggések tartóznak. Példaként vegyük a $q = F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ *Cobb-Douglas*-féle termelési függvényt. (Emlékeztetésül: Az „A” szorzót általában a technikai haladással vagy a humántőkével szokás kapcsolatba hozni, mivel $A > 1$ esetén változatlan tőke- és/vagy munkamennyiséggel nagyobb outputot lehet elérni; α pedig a termelés tőkerugalmassága, azaz ha a tőkeráfordítást 1 %-kal növeljük, akkor a termelés α %-kal nő: $\varepsilon_{q,K} = \frac{\partial q}{\partial K}\frac{K}{q} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{q} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}\frac{K}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \alpha$.) A tényező árak – p_K és p_L – ismertek. Az optimális tényezőfelhasználás feltétele, hogy a határtermelékenységek aránya egyenlő a tényezőárak arányával, vagyis $\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{p_L}{p_K}$. Mivel $MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha}$ és $MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$, ezért

$$\frac{MP_L}{MP_K} = \frac{AK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha}}{A\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L} = \frac{p_L}{p_K}. \tag{5}$$

Ez utóbbi összefüggésből adódik

$K = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}L$, ami – a termelési függvénybe behelyettesítve:

$$q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}L\right]^{\alpha}L^{1-\alpha} = A\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}\right]^{\alpha}L,$$

illetve

$$L^* = \frac{1}{A}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}\right]^{\frac{1}{\alpha}} q\,. \tag{6}$$

Az (5)-ös összefüggést L-re átrendezve azt kapjuk, hogy

$L = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_K}{p_L}K$. Ezt megint a termelési függvénybe behelyettesítve és K-ra átrendezve:

$$q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_K}{p_L}K\right]^{1-\alpha} = A\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_K}{p_L}\right]^{1-\alpha}K\,,$$

illetve

$$K^* = \frac{1}{A}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_K}{p_L}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} q\,. \tag{7}$$

A (6) és (7) alatti eredményekkel írható fel a költségfüggvény:

$$TC = p_K K + p_L L = \frac{p_K}{A}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_K}{p_L}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} q + \frac{p_L}{A}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}\right]^{\frac{1}{\alpha}} q =$$

$$= \left\{p_K\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_K}{p_L}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + p_L\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{p_L}{p_K}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}\frac{q}{A}\,.$$

Látjuk, hogy az összköltség-függvény q-ban lineáris.

6. Az előző pontot végiggondolva, a K^* és L^* optimális tényezőmennyiségeket a következő feltételes szélsőérték-feladat megoldásával nyertünk:

$$TC = p_K K + p_L L \to \min!$$

mellékfeltétel:

$$q = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\,.$$

Itt nyilván a Lagrange-függvényt is lehetett volna használni, azaz

$$H(K, L, \lambda) = p_K K + p_L L + \lambda[q - F(K, L)] \to \min!$$

Az optimumfeltételek[2] rendre:

$$\frac{\partial H}{\partial K} = p_K - \lambda F_K = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = p_L - \lambda F_L = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = q - F(K, L) = 0 \, .$$

.

Vegyük észre, hogy $H(K, L, \lambda)$ lényegében az összköltség-függvény.

Tudjuk, hogy az optimális tőke-, illetve munkamennyiség a termelési szinttől és a tényezőáraktól függ, azaz $K = K^*(q, p_K, p_L)$, valamint $L = L^*(q, p_K, p_L)$. A fenti Lagrange-függvény ezért úgy is felírható, hogy

$$H(q, p_K, p_L) = p_K K^*(q, p_K, p_L) + p_L L^*(q, p_K, p_L) +$$
$$+ \lambda(q, p_K, p_L)\left[q - F\left(K^*(q, p_K, p_L), L^*(q, p_K, p_L)\right)\right].$$

Ha a Lagrange-függvényt a termékmennyiség szerint deriváljuk, akkor

$$\frac{\partial H(q, p_K, p_L)}{\partial q} = p_K \frac{\partial K^*}{\partial q} + p_L \frac{\partial L^*}{\partial q} + \frac{\partial \lambda}{\partial q}\left[q - F(K^*, L^*)\right] + \lambda\left[1 - F_{K^*} \frac{\partial K^*}{\partial q} - F_{L^*} \frac{\partial L^*}{\partial q}\right] =$$

$$= \left[p_K - \lambda F_{K^*}\right]\frac{\partial K^*}{\partial p_K} + \left[p_L - \lambda F_{L^*}\right]\frac{\partial L^*}{\partial p_K} + \frac{\partial \lambda}{\partial p_K}\left[q - F(K^*, L^*)\right] + \lambda \, .$$

Ebből (8) miatt

$$\frac{\partial H(q, p_K, p_L)}{\partial q} = \frac{\partial TC}{\partial q} = \lambda \, , \tag{9}$$

vagyis *a Lagrange-szorzó nem más, mint a határköltség*.

7. *Shephard lemmája*: A termelési tényező iránti kereslet a termelési függvény konkrét alakjától függetlenül egyenlő a költségfüggvény tényezőár szerinti deriváltjával.

[2] Könnyen lehet arról meggyőzni, hogy a fenti feltételekből ugyanazok az optimális tőke-, illetve munkamennyiségek következnek.

Az állítást a tőkére vonatkozóan bizonyítjuk be. Kiindulópont a fenti Lagrange-, illetve összköltség-függvény:

$$H(q,p_K,p_L) = p_K K^*(q,p_K,p_L) + p_L L^*(q,p_K,p_L) +$$

$$+\lambda(q,p_K,p_L)\left[q - F\left(K^*(q,p_K,p_L), L^*(q,p_K,p_L)\right)\right].$$

Ha ezt a tőke ára szerint deriváljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial H(q,p_K,p_L)}{\partial p_K} = K^*(q,p_K,p_L) + p_K\frac{\partial K^{*}}{\partial p_K} + p_L\frac{\partial L^*}{\partial p_K} + \frac{\partial \lambda}{\partial p_K}\left[q - F\left(K^*, L^*\right)\right] +$$

$$+\lambda\left[-F_{K^*}\frac{\partial K^*}{\partial p_K} - F_{L^*}\frac{\partial L^*}{\partial p_K}\right],$$

amiből átrendezéssel

$$\frac{\partial H(q,p_K,p_L)}{\partial p_K} = K^*(q,p_K,p_L) + \left[p_K - \lambda F_{K^*}\right]\frac{\partial K^{*}}{\partial p_K} + \left[p_L - \lambda F_{L^*}\right]\frac{\partial L^*}{\partial p_K} + \frac{\partial \lambda}{\partial p_K}\left[q - F\left(K^*, L^*\right)\right]$$

.

Az összköltség-függvény létezésére vonatkozó (8)-as feltételek figyelembe véve:

$$\frac{\partial H(q,p_K,p_L)}{\partial p_K} = K^*(q,p_K,p_L),$$

ami a bizonyítandó állítás.

8. A skála rugalmasság és a költségek termelési rugalmassága közötti kapcsolat.

Az átlagköltségek definíciója $AC = \frac{TC}{q} = \frac{p_K K + p_L L}{q}$. A (8) alatti feltételeket kihasználva: $AC = \frac{\lambda F_K K + \lambda F_L L}{q}$, amiből az Euler-tételt alkalmazva $AC = \frac{\lambda r q}{q} = \lambda r$ adódik. Tekintettel arra, hogy λ a határköltség (ld. 6. pont), azt is írhatjuk, hogy $AC = MC \cdot r$, illetve $r = \frac{AC}{MC}$. Ez utóbbi viszont nem más, mint a költségek termelés szerinti rugalmassága, hiszen $\varepsilon_{TC,q} = \frac{\partial TC}{\partial q}\frac{q}{TC} = \frac{MC}{AC}$. Ezért $\varepsilon_{TC,q} = \frac{1}{r}$, tehát a költségek termelés szerinti rugalmassága egyenlő a skálarugalmasság reciprok értékével.

Így a termelési függvény ismerete elegendő, hogy megmondjuk hány százalékkal növekednek a költségek, ha a termelést egy százalékkal növeljük. A fenti példában szereplő Cobb-Douglas-féle termelési függvény elsőfokú homogén, azaz a skálarugalmasság 1, ezért ezen technológiát használva a termelés 1 százalékos növelése a költségeket szintén 1 százalékkal fogja növelni. Amennyiben azonban a termelési eljárás a $q = F(K, L) = AK\sqrt{L}$ függvénnyel lenne leírható, akkor

$$q = F(mK, mL) = AmK\sqrt{mL} = m^{\frac{3}{2}}AK\sqrt{L} = m^{\frac{3}{2}}q\ ,$$

tehát ennél a termelési függvénynél a homogenitási fok $\frac{3}{2}$, ezért a termelés 1 %-kos növelése a költségeket 0,667 %-kal növeli. A példából látszik a józan ész alapján is várható tény: minél hatékonyabb a termelés, annál rugalmatlanabb a költség a termelés növelésére.